IMMANUEL-KANT-GYMNASIUM, 42579 HEILIGENHAUS

jugend forscht
2019

Fachgebiet: Mathematik
Bundesland: NRW

Mythos Multiplikation - Tricksen wie die alten Asiaten!

Japanisches Rechensystem und Vedisches Rechnen im Vergleich

Elias Mitropoulos und Kevin Bernhard (EF)

13.01.2019

Kurzfassung:

Problemfall Schule: Die meisten Schüler höherer Jahrgänge hängen nur noch vor dem Taschenrechner. Deshalb haben sie etwas eigentlich Einfaches vergessen: das schriftliche Multiplizieren. Um die Multiplikation zu vereinfachen und das für manche Schüler doch sehr undurchsichtige schriftliche Multiplizieren zu umgehen, wurden in der Vergangenheit zahlreiche Rechentricks aus antiker Zeit wiederentdeckt. Mit diesen lassen sich Multiplikationsaufgaben super einfach lösen. Darunter finden sich auch das Vedische Rechnen und das japanische Rechensystem. Einerseits eine rechnerische, andererseits eine zeichnerische Methode zum einfachen Bewältigen von Multiplikationsaufgaben. Weil wir den Trick hinter den Tricks herausfinden wollten, erforschten wir die mathematischen Gesetzmäßigkeiten hinter diesen Raffinessen, um die Tricks auch erklären zu können. Weiterhin wollen wir die Techniken vergleichen und auf größere Zahlbereiche erweitern, um in Zukunft das Anwenden im Unterricht zu ermöglichen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 3

2 Japanisches Rechensystem 4
2.1 Grundlagen 4
2.1.1 Ursprung des Rechensystems 4
2.1.2 Erläuterung des Rechensystems 4
2.2 Symmetrieregeln 7
2.2.1 Bei gleicher Anzahl der Stellen 7
2.2.2 Bei unterschiedlicher Anzahl der Stellen 7
2.3 Mathematischer Beweis 8

3 Vedisches Rechnen 11
3.1 Grundlagen 11
3.1.1 Ursprung des Rechentricks 11
3.1.2 Erläuterung des Rechentricks 12
3.2 Mathematischer Beweis 13
3.3 Erweiterung des Vedischen Rechnens 14

4 Vergleich 15

5 Fazit 16

6 Quellen- und Literaturverzeichnis 17
6.1 Unterstützungsleistungen 17
6.2 Quellenangaben für Internetseiten 17

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Aufsplittung von Multiplikationen im japanischen Rechensystem erläutert an einer Tabelle; Elias Mitropoulos 10

Abbildungsverzeichnis

Grafik 1: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 1; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos 5
Grafik 2: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 2; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos 5
Grafik 3: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 3; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos 6
Grafik 4: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 4; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos 6
Grafik 5: Symmetrieregeln 1: Schnittpunktballverhältnis bei gleicher Stellenanzahl; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos 7
Grafik 6: Symmetrieregeln 2: Schnittpunktballverhältnis bei unterschiedlicher Stellenanzahl; Elias Mitropoulos 8
Grafik 7: Mathematisierung des Rechengitters mithilfe einer Tabelle; Elias Mitropoulos 9

1. Einleitung

Eine typische Situation in der Oberstufe: Eine einfache Multiplikationsaufgabe steht an der Tafel, alle Schüler starren mit gerunzelter Stirn auf das Display ihres grafikfähigen Taschenrechners. Das Kopfrechnen macht man in Zeiten der Taschenrechnernutzung schon lange nicht mehr, und wenn doch, dann kontrolliert man seine Rechnung später doch lieber nochmal. Eine einfache Methode zur Lösung für dieses Dilemma haben aber viele Schüler vergessen: das schriftliche Multiplizieren. Deshalb sieht sich der verzweifelte Lehrer nicht selten dazu gezwungen, zahlreiche Punkte beim taschenrechnerfreien Teil in einer Klausur abzuziehen. Drei von sieben Punkten und knapp an der 2- vorbei, ein häufig auftretender Fall.

Um dieses Problem zu beseitigen wurden in der Vergangenheit viele Rechentricks wiederentdeckt, die sich sogar zum Socialmedia Trend entwickelt haben. Auf YouTube staunten viele verzweifelten Schüler nicht schlecht, als sie plötzlich wieder in der Lage waren, Zahlen des großen Einmaleins zu multiplizieren. „Heiliges Internet!“ sieht man dann häufig in den Kommentaren stehen (Giesecke, et al., 2014).

Es müsste wohl eher „Heilige Mathematik!“ heißen, denn diese Rechentricks, teilweise stammend aus antiker Zeit, kommen ja nicht von Irgendwoher. Dahinter stecken nicht selten völlig logische, mathematische Gesetzmäßigkeiten. Weil wir ebenfalls von diesem Trend beeindruckt wurden, interessierten wir uns schnell für die wirkliche Mathematik hinter diesen Rechentricks. Wir fanden nach erster Recherche heraus, dass bei diesen „Rechenwundern“ Gesetze und Regeln gelten, die die Nutzung der Tricks unnötig einschränkten oder die genialen Methoden nur bis zu einem speziellen Zahlenraum zu benutzen waren. Erst von den zahlreichen Beschränkungen enttäuscht, entschlossen wir uns dazu, uns der Sache anzunehmen, um das zukünftige Anwenden dieser Raffinessen zu ermöglichen. Damit auch die Mathenieten durch ihr Abitur kommen, gibt es also schon bald richtige Rechentricks!
Nachfolgend präsentieren wir Ihnen die Ergebnisse unserer Forschung. Seien Sie gespannt! Schon bald haben Sie eine Ahnung davon, wie Sie sich ewig durch das Leben tricksen können.

2 Japanisches Rechensystem

2.1 Grundlagen

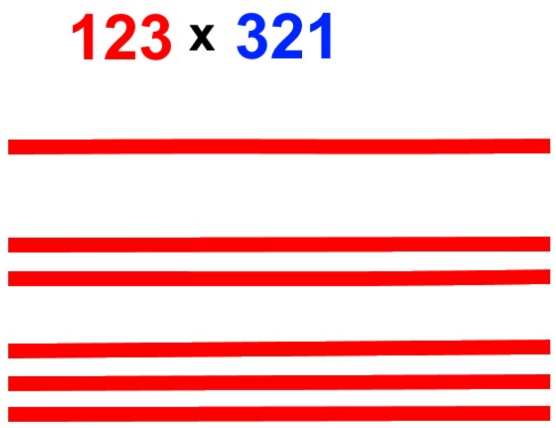
2.1.1 Ursprung des Rechensystems

Die Japaner haben das japanische Rechensystem schon vor langer Zeit erfunden. Da Stift und Papier damals nicht übliche Utensilien waren wie heutzutage, fanden die Japaner eine andere Möglichkeit. Sie entwickelten ein sehr praktisches Rechensystem. Dazu nutzten sie japanische Essstäbchen. Sie legten mit den Stäben ein gitterartiges Muster und entwickelten so ein Rechensystem zum Multiplizieren einfacher Aufgaben. Mit der Zeit geriet diese Methode aber in Vergessenheit, bis ein Lehrer einer japanischen Grundschule dieses System entdeckte (Giesecke, et al., 2014). Er verwendete das System in seinem Unterricht und lehrte die Schülerinnen und Schüler auf diese Art und Weise das Multiplizieren (2018). Schnell wurde das wiederentdeckte Rechensystem als Rechentrick zum Socialmedia Trend und rückte so wieder in die Gedächtnisse der Leute.

2.1.2 Erläuterung des Rechensystems

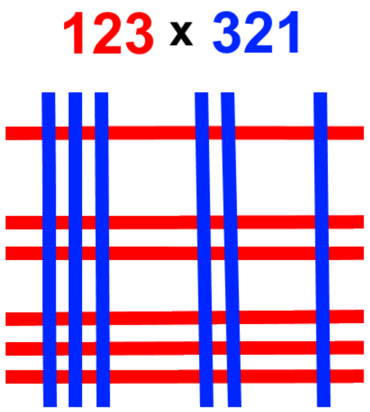
Das japanische Rechensystem ist eine Methode, mit welcher man auf zeichnerische und simple Weise Zahlen miteinander multiplizieren kann. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise beim Multiplizieren mit diesem Verfahren an einem anschaulichen Beispiel behandelt (Schanze, 2016).

Zunächst schreibt man die zu berechnende Aufgabe oben auf einen Zettel. Anschließend werden die erforderlichen Linien gezogen. Die Linien des ersten Faktors werden horizontal auf den Zettel gezeichnet (siehe Grafik 1). Die Länge der Linien ist nicht entscheidend, es ist jedoch darauf zu achten, dass die Zeichnung schlussendlich einem Gitter ähnlich sieht. Zu beachten ist außerdem, dass man mit der größten Stelle beginnt und sich bis zu der Einerstelle von oben nach unten durcharbeitet. Es werden pro Stelle so viele Striche unmittelbar untereinander gezeichnet, wie die Ziffer der zu beschreibenden Stelle in der Aufgabe angibt. Zwischen den einzelnen Stellen wird ein extra großer Abstand gelassen, um für eine übersichtliche Darstellung zu sorgen.



Grafik 1: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 1; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos

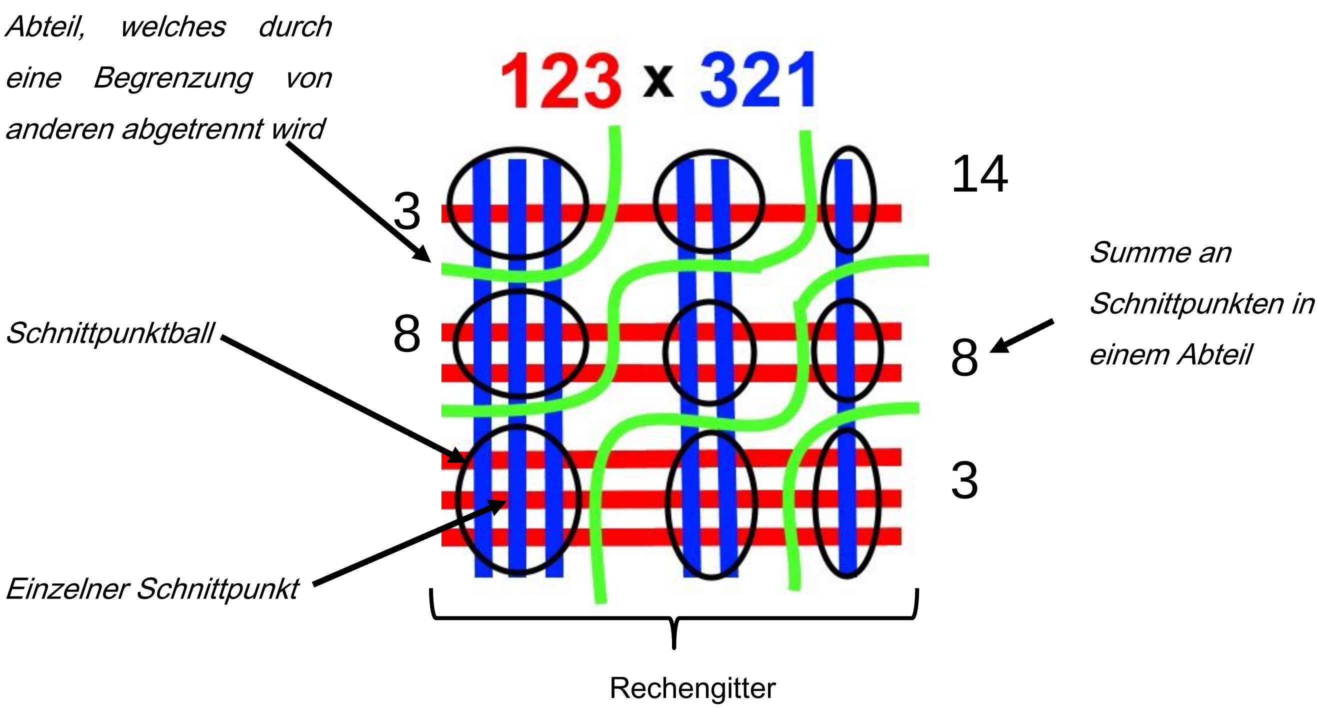
Ist der erste Faktor in Linienform aufgezeichnet, folgt das Zeichnen des zweiten Faktors. Um schließlich ein Gitter zu erhalten, werden die erforderlichen Linien des zweiten Faktors orthogonal, die Linien des ersten Faktors kreuzend, gezeichnet. Dabei geht man wie beim ersten Faktor von links nach rechts vor.



Grafik 2: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 2; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos

Sind alle erforderlichen Linien gezeichnet worden, kann man mit dem Einteilen der Zeichnung in Abteile beginnen. Man kann bereits jetzt Schnittpunktbälle in der Zeichnung erkennen, die in Grafik 3 umkreist sind. Diese werden nun durch Schlängellinien sichtbar gemacht (siehe Grafik 3). Dabei muss man beachten, dass man in der rechten unteren Ecke beginnt. Der rechts unten befindliche Schnittpunktball bildet dabei das erste Abteil. Danach wird das zweite Abteil kreiert. In dieses werden nun die beiden diagonal nächsten Schnittpunktbälle gepackt. Hat man dieses Abteil wieder konform abgetrennt, folgt das dritte Abteil. In dieses werden die drei diagonal nächsten Schnittpunktbälle gesteckt. Ist das Gitter nun noch breit genug, um eine diagonale Reihe, die vier Schnittpunktbälle enthalten kann zu ergeben, kann man das Abteil einzeichnen. In dem Beispiel ist eine diagonale Reihe mit drei Schnittpunktbällen das Maximale, was möglich ist.

Deshalb verpackt man in das folgende Abteil wieder eine diagonale Reihe mit zwei Schnittpunktbällen. Die Abteile nehmen immer mit der Zahl eines Schnittpunktballes ab, bis man ein Abteil mit nur noch mit einem Schnittpunktball, an der oberen linken Ecke einzeichnen kann. Das Endergebnis der Einteilung sieht dann folgendermaßen aus:



Grafik 3: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 3; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos

Zur besseren Übersicht kann man nun die einzelnen Schnittpunktbälle einkreisen und die Anzahl der Schnittpunkte in jedem Abteil miteinander addieren. Die Summe eines jeden Abteils kann man an ein beliebiges Ende des Abteils schreiben, um das schnelle Addieren im letzten Schritt zu gewährleisten.

Im letzten Schritt muss man die Summen der Abteile noch zu einem Endergebnis addieren. Man beginnt mit der Zählung der Schnittpunkte immer in der rechten unteren Ecke des Musters. Die ermittelte Anzahl der Schnittpunkte (im Beispiel bei Abteil 1: 3) wird normal notiert. Anschließend zählt man alle Schnittpunkte im angrenzenden Abteil. Die ermittelte Summe (im Beispiel: 8) muss nun unter die zuvor ermittelte Anzahl des Abteils eins geschrieben werden. Man muss jedoch beachten, dass dies in Form einer Treppe geschieht, also wie beim schriftlichen Multiplizieren. Dafür muss man die ermittelte Summe des Abteiles zwei mit einer Null „auffüllen“, die ermittelte Summe aus dem eventuell vorhandenen Abteil drei mit zwei Nullen. Diese Methode des Addierens (siehe Grafik 4) verhält sich für unendlich viele Abteile analog.

123x321
3
80
1400
8000
30000
39483

Grafik 4: Erläuterung des Rechensystems an Beispiel Schritt 4; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos

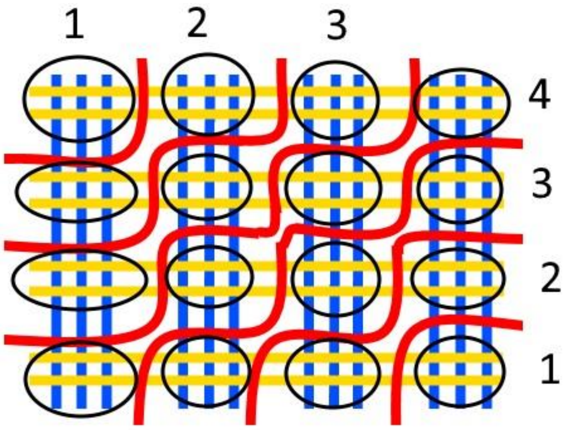
2.2 Symmetrieregeln

In diesem Kapitel werden sogenannte Symmetrieregeln des japanischen Rechensystems erläutert, die die Struktur und die Gliederung des Rechensystems geeignet darstellen und erklären können.

2.2.1 Bei gleicher Anzahl der Stellen

Bei der Multiplikation von Zahlen mit der gleichen Stellenanzahl miteinander, ergibt sich folgende Regel:

Wenn man eine Zahl mit vier (drei; zwei) Stellen mit einer Zahl, die ebenfalls vier (drei; zwei) Stellen hat, multipliziert, ergibt sich ein System mit einem Symmetriemuster, welches an folgendem Beispiel erläutert wird:



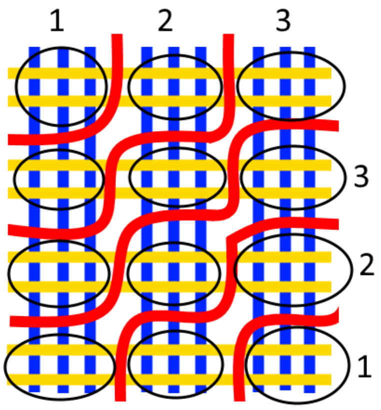
Grafik 5: Symmetrieregeln 1: Schnittpunktballverhältnis bei gleicher Stellenanzahl; Ellen Jockers Ribeiro, Elias Mitropoulos

Die Schnittpunktbälle (schwarz umkreist) für jedes einzelne Abteil (rote Begrenzung) ergeben, wie im Beispiel erkennbar (siehe Grafik 5), ein Symmetriemuster der Form 1-2-3-4-3-2-1. Dabei wird die Anzahl der sich in einem Abteil befindlichen Schnittpunktbälle betrachtet, um bereits vor der Zeichnung vorhersagen zu können, mit welcher Symmetrieform zu rechnen ist. Die Anzahl der Stellen gibt hierbei an, bei welchem Abteil sich das Muster umkehrt und wie viele Schnittpunktbälle im maximal befüllten Abteil vorhanden sind. Hier im Beispiel also bei Abteil vier. Schließlich sind dort vier Schnittpunktbälle vorhanden, die sich im nächst höheren Abteil nicht auf fünf erhöhen. Sie steigen nach dem maximal befüllten Abteil wieder ab, sodass Abteile mit je einem Schnittpunktball weniger folgen, bis man nur noch einen Schnittpunktball in ein Abteil packen kann.

2.2.2 Bei unterschiedlicher Anzahl der Stellen

Bei der Multiplikation von Zahlen mit unterschiedlicher Stellenanzahl miteinander, ergibt sich folgende Regel:

Wenn man eine Zahl mit vier (drei; zwei) Stellen mit einer Zahl, die nicht vier (drei; zwei) Stellen hat, multipliziert, ergibt sich ein System mit einem Symmetriemuster, welches an folgendem Beispiel erläutert wird:



Grafik 6: Symmetrieregeln 2: Schnittpunktballverhältnis bei unterschiedlicher Stellenanzahl; Elias Mitropoulos

Bei dieser Multiplikation von Faktoren mit einer unterschiedlichen Stellenanzahl ergibt sich ein Symmetriemuster von 1-2-3-3-2-1 (siehe Grafik 6). Dabei wird die Anzahl der schwarz umkreisten Schnittpunktbälle pro Abteil betrachtet, um eine Vorhersage über das Aussehen der zu zeichnenden Rechengitter treffen zu können. Bei Multiplikationen von Faktoren mit unterschiedlicher Stellenanzahl gibt also der Faktor mit der kleineren Zifferanzahl an, bei welchem Abteil sich das Rechenmuster umkehren muss und die Anzahl der Schnittpunktbälle wieder abnehmen muss. Außerdem gibt dieser Faktor darüber Auskunft, wie viele Schnittpunktbälle sich im maximal befüllten Abteil oder den maximal befüllten Abteilen (durch rote Schlangenlinien begrenzt, Grafik 6) befinden. Im obigen Beispiel geschieht dies also bei Abteil drei beziehungsweise Abteil vier, denn nach diesen beiden maximal befüllten Abteilen nimmt die ehemals aufsteigende Anzahl der Schnittpunktbälle pro Abteil wieder ab. Dadurch befinden sich im folgenden Abteil nur noch zwei Schnittpunktbälle und im letzten Abteil nur noch ein Schnittpunktball.

Die Besonderheit der Rechengitter bei einer Multiplikation von Faktoren mit unterschiedlicher Stellenanzahl ist die (eventuell auch mehrfache) Duplizierung des maximal befüllten Abteils. Wie oft das maximal befüllte Abteil im Rechengitter dupliziert wird, entscheidet die Differenz der Stellen der beiden Faktoren. Im obigen Beispiel (Grafik 6) ist die Differenz der Stellen der beiden Faktoren eins, denn es wird eine vierstellige Zahl mit einer dreistelligen Zahl multipliziert. Somit wird das maximal befüllte Abteil, welches drei Schnittpunktballe beinhalten muss, noch einmal dupliziert und taucht somit im Rechengitter unmittelbar nach der Ersterscheinung noch einmal auf. Wenn die Differenz der Stellen der beiden Faktoren nicht eins, sondern zwei (drei; vier) beträgt, so muss das maximal befüllte Abteil auch zweimal (dreimal; viermal) dupliziert werden.

2.3 Mathematischer Beweis

Um die mathematischen Gesetzmäßigkeiten beim japanischen Rechensystem verstehen zu können, bedarf es zunächst einer Vorüberlegung. Damit nämlich ein Zusammenhang zwischen der Zeichnung und der Mathematik erkennbar und nachvollziehbar ist, überlegten wir uns, wie die gezeichneten Rechengitter des japanischen Rechensystems allgemein zustande kommen und was in den durch die Abgrenzungen entstehenden Abteilen dargestellt wird. Nachfolgend wird diese Vorüberlegung anhand einer Multiplikation von zwei vierstelligen Faktoren allgemein erklärt. Im Anschluss möchten wir dann eine Übertragung und somit eine äquivalente Nutzung bei allen anderen Multiplikationsaufgaben durch einen allgemeinen Beweis ermöglichen.

Man multipliziert zunächst die beiden Faktoren normal miteinander, indem man das zugehörige Rechengitter auf Basis des japanischen Rechensystems zeichnet.

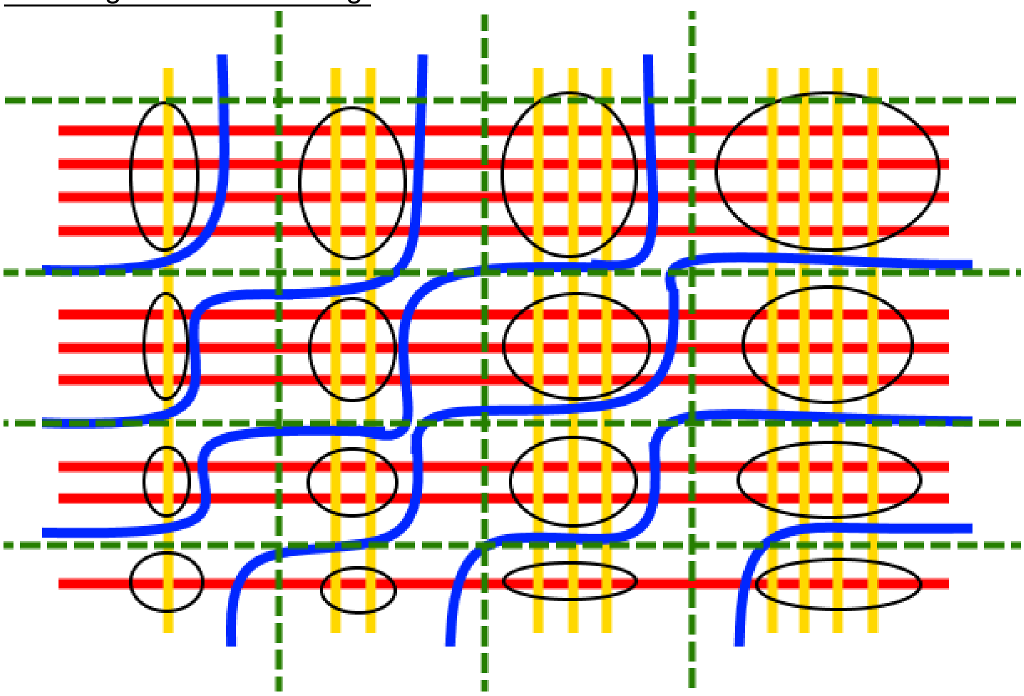
Grundlegende Rechnung:

4321×1234

Diese Multiplikationsaufgabe wird nun mithilfe von acht Variablen verallgemeinert, um einen Beweis des japanischen Rechensystems für Aufgaben mit zwei vierstelligen Faktoren formulieren zu können. Die folgende Schreibweise lässt sich verwenden, weil so eine Zuordnung der Ziffern zu den jeweiligen Stellen durch Zehnerpotenzen entsteht. In unserem Beispiel sind beide Faktoren vierstellig, somit reichen beide Zahlen als solche in den Zahlenraum 10^3. Die Variable selbst gibt somit den Wert an, den die jeweilige Stelle bei einer Multiplikation hat, und die jeweilige Zehnerpotenz ist für die Nullen dahinter verantwortlich. Der Index startet bei Null und nicht bei Eins, weil sich die Einer einer jeden Multiplikationsaufgabe im Zahlenraum 10^0 befinden. Es ergibt sich also:

$$(x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) \cdot (y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0)$$

Rechengitter der Rechnung:



Grafik 7: Mathematisierung des Rechengitters mithilfe einer Tabelle; Elias Mitropoulos

Auch das Rechengitter der vorangegangenen Multiplikation lässt sich verallgemeinern und mathematisieren, wenn man sich zu diesem Zweck die einzelnen Schnittpunktbälle ansieht (Grafik 7) und die Zeichnung in eine tabellenartige Form bringt, sodass sich immer ein Schnittpunktball in einem Tabellenfeld befindet. Betrachtet man nun die Einträge in allen Tabellenzellen, lässt sich darin durch die Kreuzung der einzelnen vertikalen Linien mit den horizontalen Linien die Multiplikation einer Stelle der ersten Zahl mit einer Stelle der anderen Zahl erkennen. Somit findet im gesamten Rechengitter also nichts anderes als das Distributivgesetz statt, wie man auch an folgender Veranschaulichung erkennen kann (Tabelle 1).

10^6	$x_3 \cdot y_3$	$x_3 \cdot y_2$	$x_3 \cdot y_1$	$x_3 \cdot y_0$
10^5	$x_2 \cdot y_3$	$x_2 \cdot y_2$	$x_2 \cdot y_1$	$x_2 \cdot y_0$
10^4	$x_1 \cdot y_3$	$x_1 \cdot y_2$	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 \cdot y_0$
10^3	$x_0 \cdot y_3$	$x_0 \cdot y_2$	$x_0 \cdot y_1$	$x_0 \cdot y_0$
	10^3	10^2	10^1	10^0

Tabelle 1: Aufsplittung von Multiplikationen im japanischen Rechensystem erläutert an einer Tabelle; Elias Mitropoulos

Weil die Stelle jeder Zahl durch eine Zehnerpotenz beschrieben wird, wird auch das Produkt zweier bestimmter Stellen durch den Wert des Zehnerexponenten bestimmt. Wird wie in Tabelle 1 also beispielsweise die Variable x_3 mit der Variable y_3 multipliziert, so entsteht ein Produkt, welches der Stelle $10^3 \cdot 10^3 = 10^6$ zuzuordnen ist. Anhand aller entstehenden Produkte in Tabelle 1 kann zudem zwischen zahlreichen Produkten ein Zusammenhang erkannt werden (siehe farbliche Markierungen in Tabelle 1). Dieser äußert sich in der Zugehörigkeit der jeweiligen Produkte zu ein und derselben Stelle, denn es gibt in manchen Fällen mehrere Möglichkeiten, die Zahlenräume der Stelle zu erreichen. Haben also allgemein mehrere Produkte nach Anwendung des Potenzgesetzes als Zehnerexponent die Zahl n, so gehören sie zur n –ten Stelle. Diese werden in dem japanischen Rechensystem grafisch durch die Abteile zusammengefasst, die man bei der Erstellung des Rechengitters ziehen muss. Somit ergibt sich aus der Tabelle 1 folgende mathematische Rechnung, die entsprechend auch beim Ausmultiplizieren des Produkts $(x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10^1 + x_0 \cdot 10^0) \cdot (y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10^1 + y_0 \cdot 10^0)$ ergibt:

$$\begin{aligned} 10^{3+3} \cdot x_3 y_3 + 10^{3+2} \cdot x_3 y_2 + 10^{3+1} \cdot x_3 y_1 + 10^{3+0} \cdot x_3 y_0 + 10^{2+3} \cdot x_2 y_3 + 10^{2+2} \cdot x_2 y_2 + 10^{2+1} \\ \cdot x_2 y_1 + 10^{2+0} \cdot x_2 y_0 + 10^{1+3} \cdot x_1 y_3 + 10^{1+2} \cdot x_1 y_2 + 10^{1+1} \cdot x_1 y_1 + 10^{1+0} \cdot x_1 y_0 \\ + 10^{0+3} \cdot x_0 y_3 + 10^{0+2} \cdot x_0 y_2 + 10^{0+1} \cdot x_0 y_1 + 10^{0+0} \cdot x_0 y_0 \end{aligned}$$

Die obige Rechnung lässt sich wie folgt zusammenfassen, sodass die einzelnen Schnittpunktbälle in den Abteilen auch in der Rechnung erkennbar werden (vgl. Tabelle 1):

$$10^6 x_3 y_3 + 10^5(x_3 y_2 + x_2 y_3) + 10^4(x_3 y_1 + x_1 y_3 + x_2 y_2) + 10^3(x_3 y_0 + x_0 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2) + 10^2(x_2 y_0 + x_0 y_2 + x_1 y_1) + 10^1(x_1 y_0 + x_0 y_1) + 10^0 x_0 y_0$$

Mit der Summe der Schnittpunktanzahlen erhält man dann den endgültigen Wert des Abteils und damit den Wert an einer bestimmten Stelle. Das kann einfach über die Anzahl der Schnittpunkte in einem Abteil abgezählt werden.

Auf Basis der vorangegangenen Erklärungen lässt sich das japanische Rechensystem auch auf Zahlen mit beliebig vielen Stellen auf Basis der folgenden Formel verallgemeinern, deren Summanden gerade allen Schnittpunktbällen entsprechen. Das dürfen wir annehmen, da das Distributivgesetz auf beliebig viele Summanden erweiterbar ist:

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 10^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} y_j \cdot 10^j\right) = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{i=n \\ j=m}} 10^{(i+j)}\, x_i y_j$$

$$\text{für } x, y, n, m \in \mathbb{N},\ x_i, y_j \in \{0 \dots 9\}$$

3 Vedisches Rechnen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Ursprung des Rechentricks

Die sogenannte Vedische Mathematik gibt es vermutlich seit mehreren tausend Jahren. Indische Forscher behaupten, sie sei die älteste Rechenkunst der Geschichte überhaupt. Nach den Ursprüngen zu suchen, ist nicht ganz einfach. Trotzdem weiß man, dass die Mathematik etwa um 500 n. Chr. durch mündliche Überlieferung niedergeschrieben worden ist. Erstmals fand man die Verfahren in der " Rig Veda " (Schonard, 2011). Sie gehört zum ältesten Teil der vier Veden und ist somit die wichtigste Schrift im Hinduismus (Wikimedia Foundation ORG, 2018). Später wurden solche mathematischen Überlegungen auch in anderen antiken Schriften gefunden. Diese Formeln wurden hauptsächlich für den Opferaltarbau und Tempelbau benutzt. Doch ab 1884 wurde die vedische Mathematik in den Schulplan vieler indischer Schulen integriert und ist dort bis heute ein wichtiger Teil des Mathematikunterrichts (Schonard, 2011). Als Rechentrick verkauft wurde auch das Vedische Rechnen in den sozialen Netzwerken zum Mathematik-Trend (Giesecke, et al., 2013).

3.1.2 Erläuterung des Rechentricks

Das Vedische Rechnen ist eine Methode, mit welcher man auf vereinfachte rechnerische Weise Zahlen miteinander multiplizieren kann. In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise beim Multiplizieren mit diesem Verfahren an einem anschaulichen Beispiel behandelt (Schonard, 2011).

Zunächst schreibt man die zu berechnende Aufgabe oben auf einen Zettel. Danach werden die Differenzen der Zahlen bis zur nächsten Zehnerpotenz ermittelt.

Grundlegende Rechnung:

$$93 \cdot 91$$

Ermittlung der Differenzen zur nächsten Zehnerpotenz:

$$10^2 - 93 = 7$$
$$10^2 - 91 = 9$$

Nun schreibt man die beiden vorgegebenen Faktoren untereinander auf den Zettel. Neben die jeweiligen Faktoren wird nun die zugehörige Differenz geschrieben, sodass man eine Art 2*2 Tabelle erhält. Nun wird kreuzweise subtrahiert, wobei die niedrigere Zahl von der größeren Zahl abgezogen wird. Beide Subtraktionen ergeben in jedem Fall das gleiche Ergebnis (siehe: 3.2 Mathematischer Beweis). Das Ergebnis dieser Rechnung steht als vorderster Teil des Ergebnisses (Teilergebnis) bereits fest.

93	7
91	9

$$93 - 9 = 84$$
$$91 - 7 = 84$$

84 ≙ Teilergebnis 1 des gesuchten Ergebnisses

Jetzt müssen die zuvor ermittelten Differenzen noch miteinander multipliziert und hinter das Teilergebnis 1 „geschoben" werden:

$$7 \times 9 = 63$$

63 ≙ Teilergebnis 2 des gesuchten Ergebnisses

→ Durch „Zusammenschieben" von Teilergebnis 1 und 2 ergibt sich:

<u>8463</u>

Das Zusammenschieben ist jedoch nur möglich, wenn zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1. Die Stellenanzahl des Teilergebnisses 2 muss mit dem Exponenten der Zehnerpotenz aus dem 1. Schritt übereinstimmen.
2. Beide zu multiplizierenden Zahlen müssen ober- oder unterhalb der gewählten Zehnerpotenz liegen.

Falls eine Voraussetzung nicht erfüllt ist, kann das Vedische Rechnen laut unserer Recherche bei diesen Fällen nicht angewendet werden (Schonard, 2011). Im Rahmen unseres Projektes konnten wir jedoch auf Basis des Beweises weitere Regeln entwickeln, die auch eine vielfältigere Anwendung ermöglichen (siehe 3.3 Erweiterung des Vedischen Rechnens).

3.2 Mathematischer Beweis

Das Vedische Rechnen unterliegt als Rechentrick oft dem Mythos, man konnte diese Tricks häufig nicht erklären. Dabei liegt auch dieser Rechenweise eine mathematische Gesetzmäßigkeit zugrunde, die sich anhand eines einfachen Beweises erklären lässt. Im Folgenden wird das Vedische Rechnen mithilfe von Zehnerpotenzen und dem Distributivgesetz bewiesen.

Zuallererst werden zwei Variablen (x und y) neu definiert. Da x und y die beiden Faktoren der späteren Multiplikationsaufgabe sind, wurden diese umdefiniert zu einer Summe aus einer noch nicht näher definierten Zehnerpotenz und einer Differenzvariable.

$x \coloneqq 10^n + a$ und $y \coloneqq 10^n + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z},\ x, y, n \in \mathbb{N}$

Die Differenzvariable gibt dabei jeweils die Abweichung von der vorangestellten Zehnerpotenz an. Da die Differenzvariablen a und b Elemente der ganzen Zahlen sind, können somit Zahlen unter- und oberhalb der beschriebenen Zehnerpotenz dargestellt werden.

Für die Multiplikation der Zahlen x und y gilt somit:

$$\begin{aligned} & x \cdot y \\ &= (10^n + a)(10^n + b) \\ &= 10^{2n} + 10^n(a + b) + ab \\ &= \underline{\underline{10^n(10^n + a + b) + ab}} \end{aligned}$$

Dieser Beweis erläutert drei Dinge:

1. Der blau unterlegte Teil der Summe beschreibt das Teilergebnis 1, welches durch Addition der beiden Differenzvariablen entsteht. In unserem Beispiel entspricht also die gekreuzte Differenz $93 - 9$ bzw. $91 - 7$ gerade der Rechnung $10^2 + (-7) + (-9)$.
2. Der grün unterlegte Teil der Summe beschreibt die Multiplikation der ermittelten Differenzen. In unserem Beispiel entspricht also $7 \cdot 9$ dem Summanden $a \cdot b$.
3. Der rot unterlegte Teil entspricht gerade der nächstgelegenen Zehnerpotenz, die im 1. Schritt gewählt wird. Zudem erklärt sie auch das im Beispiel vollzogene „Zusammenschieben“, da sie über die kleinste Stelle des 1. Teilergebnisses entscheidet. Sofern die Stellenanzahl von $a \cdot b$ dem Exponenten der Zehnerpotenz entspricht, können die beiden Teilergebnisse zusammengeschoben, bzw.

mathematisch ausgedrückt addiert werden. Im Beispiel ergäbe sich also mit obigem Beweis folgende Rechnung:

$91 \cdot 97 = 10^2\big(10^2 + (-7) + (-9)\big) + (-7) \cdot (-9) = 10^2 \cdot 84 + 63 = 8400 + 63 = 8463.$

Nun zeigen sich die Probleme bei der Anwendung des Tricks ganz deutlich, wenn schon eine der beiden Voraussetzungen nicht erfüllt wird und man dann mithilfe der obigen Rechnung folgende Multiplikationen vornehmen möchte:

Es gilt: $87 \cdot 84 = 10^2\big(10^2 + (-13) + (-16)\big) + (-13) \cdot (-16) = 10^2 \cdot 71 + 208 = 7100 + 208 = 7308$. Würde man nun einfach die Teilergebnisse zusammenschieben, erhielte man 71208.

Auch bei dieser Rechnung ergibt sich das Problem: $97 \cdot 104 = 10^2(10^2 + (-3) + 4) + (-3) \cdot 4 = 10^2 \cdot 101 - 12 = 10100 - 12 = 10088$. Würde man auch hier die Teilergebnisse zusammenschieben erhielte man 10112.

Anhand dieser Beispiele wird deutlich, dass für die Fälle, in denen die Voraussetzungen nicht zutreffen, weitere Regeln gelten müssen, die im Folgenden erläutert werden.

3.3 Erweiterung des Vedischen Rechnens

Zur Lösung des Problems beim „Zusammenschieben“ kann das Vedische Rechnen mit folgenden Erweiterungsregeln ergänzt werden:

Wenn die Stellenanzahl der Differenzmultiplikation $a \cdot b$ nicht mit dem Exponenten der gewählten Zehnerpotenz aus dem 1. Schritt der Erklärung des Vedischen Rechens übereinstimmt sondern größer ist, so muss die überschüssige vordere Stelle des Produktes der Differenzmultiplikation als Übertrag auf das Teilergebnis 1 aufaddiert werden, wie dies auch beim schriftlichen Addieren üblich ist.

Wenn die Stellenanzahl der Differenzmultiplikation kleiner ist als der Exponent der vorangestellten Zehnerpotenz, so müssen zwischen die beiden Teilergebnisse Nullen ergänzt werden. Die Anzahl der Nullen entspricht dabei gerade der Differenz von Exponent und Stellenanzahl der Differenzmultiplikation. Beispielsweise müsste bei der Berechnung von $97 \cdot 98$ eine Null ergänzt werden, da der Exponent der Zehnerpotenz 2 ist und das Produkt $a \cdot b = 5$ nur eine Stelle besitzt.

Zur Bewältigung des zweiten Problems, dass bei zwei Faktoren, von denen einer ober- und einer unterhalb der gewählten Zehnerpotenz liegt, können wir folgendes ergänzen: Wenn die beiden Faktoren der zu berechnenden Multiplikationsaufgabe nicht beide ober- beziehungsweise unterhalb der gewählten Zehnerpotenz liegen, so ist es notwendig, die Differenzmultiplikation $a \cdot b$ vom Teilergebnis 1, welches dann mit so vielen Nullen aufgefüllt wird, wie der Wert des Exponenten der vorangestellten Zehnerpotenz es vorgibt, zu subtrahieren, um das korrekte Ergebnis der Rechnung zu erhalten. Folgendes Beispiel gilt:

$$97 \cdot 104 = 10^2(10^2 + (-3) + 4) + (-3) \cdot 4 = 10^2 \cdot 101 - 12 = 10100 - 12 = 10088$$

Statt beim Zusammenschieben dieser Beispielrechnung fälschlicherweise 10112 zu erhalten, wendet man die hier erläuterte zweite Regel an, weil die Voraussetzung, dass alle Faktoren der zu berechnenden Aufgabe ober- oder unterhalb der gewählten Zehnerpotenz sein müssen, nicht erfüllt wird. Also füllt man das Teilergebnis 1 (im Beispiel: 101) mit zwei Nullen auf, weil ein Bezug zur nächsten Zehnerpotenz 10^2 angibt, dass die Auffüllung von Nullen mit dem Wert zwei beziffert ist. Es ergibt sich für das Beispiel nun also 10100. Von diesem Teilergebnis wird die Differenzmultiplikation $a \cdot b$ subtrahiert, sodass sich aus der Rechnung $10100 - 12 = 10088$ ergibt. Dies ist gleichzeitig auch das korrekte Ergebnis der Aufgabe.

4 Vergleich

Die beiden von uns untersuchten Rechentricks für Multiplikationsaufgaben werden wir nachfolgend einem Vergleich und einer Beurteilung unterziehen, um festzuhalten, wann das jeweilige Rechensystem beziehungsweise die jeweilige Rechenart zur optimalen Nutzung geeignet ist. Denn natürlich sind beide behandelten Tricks grundsätzlich für viele Multiplikationsaufgaben verwendbar, jedoch gibt es Fälle, bei denen eine Benutzung des einen oder des anderen Rechensystems sinnvoller ist oder eine Nutzung des einen oder des anderen Rechentricks nicht möglich ist.

Das Vedische Rechnen ist in der Praxis am besten für Multiplikationsaufgaben in kleinen Zahlenräumen sowie für Multiplikationsaufgaben mit Zahlen nahe einer Zehnerpotenz geeignet. Dies lässt sich damit begründen, dass sich bei einer Multiplikationsaufgabe mit vielen Stellen sehr große Differenzen zur nächsten Zehnerpotenz ergeben können. Weil die beiden ermittelten Differenzen im letzten Schritt der Anwendung des Vedischen Rechnens miteinander multipliziert werden müssen, ist bei der Entstehung von großen Differenzen oft keine Multiplikation ohne zusätzliches Rechnen möglich. Das würde bei der Multiplikation von zwei Faktoren in größeren Zahlenräumen also ein zusätzliches Hindernis bei der Bewältigung der Aufgabe ergeben. Vielmehr würde das Nutzen des Vedischen Rechnens ad absurdum führen, weil man eine Multiplikationsaufgabe durch eine genau so schwere ersetzt. Daher ist die Nutzung des Vedischen Rechnens für einen solchen Fall sehr unattraktiv. Außerdem ist das Vedische Rechnen darüber hinaus nicht universell einsetzbar, es können ausschließlich Zahlen miteinander multipliziert werden, die dieselbe Zehnerpotenz als nächste Zehnerpotenz haben, weil sonst eine einheitliche Differenzbildung zur nächsten Zehnerpotenz nicht möglich ist.
Lösen könnte dieses Problem das japanische Rechensystem. Durch das geschickte Kombinieren der beiden Rechenweisen wäre so auch eine Anwendung des Vedischen Rechnens in größeren Zahlenräumen möglich. Mit dem japanischen Rechensystem könnten

im letzten Schritt durch das gezeichnete Muster nämlich die vorher ermittelten Differenzen miteinander multipliziert werden. So wäre die Vereinfachung des Vedischen Rechnens nämlich auch noch bei nicht gut gelegenen Differenzfaktoren gegeben und der Trick als solcher weiterhin einfach anwendbar.

Das japanische Rechensystem selbst ist aber der Alleskönner und somit auch dem Vedischen Rechnen überlegen. Denn die Anwendung des japanischen Rechensystems ist bei jeder denkbaren Multiplikationsaufgabe möglich. Zwar ist anzumerken, dass die zu zeichnenden Muster bei einer Multiplikation von Zahlen mit vielen Stellen auch immer größer und umfangreicher werden. Das hat in der Regel die Folge, dass das gezeichnete Rechengitter schnell unübersichtlich wird. Außerdem dauert das Zeichnen des Rechengitters und das Zählen der Schnittpunkte mit zunehmender Größe der Faktoren immer länger, weswegen es in solchen Fällen relativ schnell umständlicher als das schriftliche Multiplizieren wird. Dennoch ist der Trick in vielen Fällen eine Vereinfachung, kann aber theoretisch in jedem Fall eine Hilfe sein. Denn grundsätzlich ist das Anwenden bei beliebigen Multiplikationsaufgaben möglich.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Vedische Rechensystem vor allem in kleineren Zahlenräumen und bei Zahlen nahe einer Zehnerpotenz hilfreich sein kann, jedoch viele Einschränkungen mit sich bringt. Das japanische Rechensystem ist der Problemlöser und ermöglicht auch eine Nutzung vom Vedischen Rechnen in größeren Zahlenräumen. Aber auch das japanische Rechensystem selbst kann universell eingesetzt werden. Zwar ist es mit zunehmender Größe des Rechengitters immer umständlicher, das japanische Rechensystem anzuwenden, dort ist dann das „normale" schriftliche Multiplizieren effektiver. Dennoch ist es unter unseren beiden Rechentricks der „Alleskönner" und kann so jedem frustrierten Schüler eine Hilfe bei der Bewältigung von Schulaufgaben sein. Und das Beste: Der frustrierte Schüler kann jetzt verstehen, wieso er mit Hilfe der Mathematik tricksen kann!

5 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass wir den scheinbaren Mythos hinter den beiden Rechentricks entlarvt haben. Das haben wir mit eigentlich einfacher Mathematik geschafft. Durch diese konnten wir in unserer Forschung die beiden Rechentricks mathematisch beweisen und vergleichen. Außerdem ist uns eine Erweiterung des Vedischen Rechnens gelungen, welche jetzt einen vielfältigeren Einsatz für diesen Rechentrick ermöglicht. Denn ohne die beiden von uns aufgestellten Erweiterungsregeln ist das Vedische Rechnen bei sehr vielen Multiplikationsaufgaben nicht nutzbar und es schleichen sich somit unnötig viele

Fehler ein. Denn die Influencer, im Internet bereits gepriesen als Mathestars, sagen bei diesen Tricks nur die halbe Wahrheit. So tappen viele jungen Schüler in die Falle, und das ganz ohne irgendeine Ahnung. Zum Glück ist es uns gelungen, dem jetzt ein Ende zu setzen und den Schülern eine vielfältigere, aber korrekte Nutzung des Vedischen Rechnens zu ermöglichen. Auch beim japanischen Rechensystem ist es uns gelungen, die Mathematik hinter dieser zeichnerischen Methode endlich zu verstehen. Dies ist ein großer Schritt für uns, denn so haben wir auch einmal in die komplexere Mathematik hinein geschnuppert. Wir blicken zufrieden auf unsere Forschung zurück und freuen uns, Ihnen die Wunder demnächst zu präsentieren.

6 Quellen- und Literaturverzeichnis

6.1 Unterstützungsleistungen

1 Kathrin Korb, Mathematik und Physiklehrerin am Immanuel-Kant-Gymnasium, Heiligenhaus; Art der Unterstützung: Projektbetreuerin

2 Sarah Braun, Mathematik und Physiklehrerin am Immanuel-Kant-Gymnasium, Heiligenhaus; Art der Unterstützung: Projektbetreuerin

3 Ellen Jockers Ribeiro, Schülerin der Einführungsphase am Immanuel-Kant-Gymnasium, Heiligenhaus; Art der Unterstützung: Projektgründerin, ausgeschiedenes Gruppenmitglied

Wir danken allen weiteren Lehrern und Lehrerinnen des Immanuel-Kant-Gymnasiums für die Unterstützung durch das Drehtürmodell und weitere Tätigkeiten, sowie unseren Eltern, die uns ebenfalls bestmöglich unterstützt haben.

6.2 Quellenangaben für Internetseiten

Geniales System: So lernen japanische Schüler schriftliche Multiplikation [Online] // Stern NEON. - 19. Oktober 2018. - 29. Dezember 2018. - https://www.stern.de/neon/magazin/geniales-system--so-lernen-japanische-schueler-schriftliche-multiplikation-7767736.html.

Giesecke Alexander und Schork Nicolai Geniale Rechentricks-Vedische Mathematik [Online] // YouTube. - 22. Juli 2013. - https://www.youtube.com/watch?v=yHF95qXx8GQ.

Giesecke Alexander und Schork Nicolai Schnelles Multiplizieren - Japanische Rechentricks [Online] // YouTube. - simpleclub, 29. Juni 2014. - 1.0. - 28. März 2018. - https://www.youtube.com/watch?v=t_u0_9SzYE0&.

Schanze Robert Multiplizieren: Schriftlich und mit Strichen (auf japanische Art) [Online] // GIGA. - 7. Juni 2016. - https://www.giga.de/extra/ratgeber/tipps/multiplizieren-schriftlich-und-mit-strichen-auf-japanische-art/.

Schonard Armin Rechnen wie die alten Inder - Vedische Mathematik, eine (fast) vergessene Wissenschaft [Artikel] // INDIEN Magazin. - 8. Juli 2011. - S. 54-58.

Wikimedia Foundation ORG Rigveda [Online] // Wikipedia. - 23. 12 2018. - https://de.wikipedia.org/wiki/Rigveda.

Diese schriftliche Arbeit wurde für den Regionalwettbewerb „Jugend forscht“ geschrieben, welcher am 20. Februar 2019 im Rahmen von „Jugend forscht 2019“ in Duisburg ausgetragen wird.